SISTEMI DI CONDOTTE:

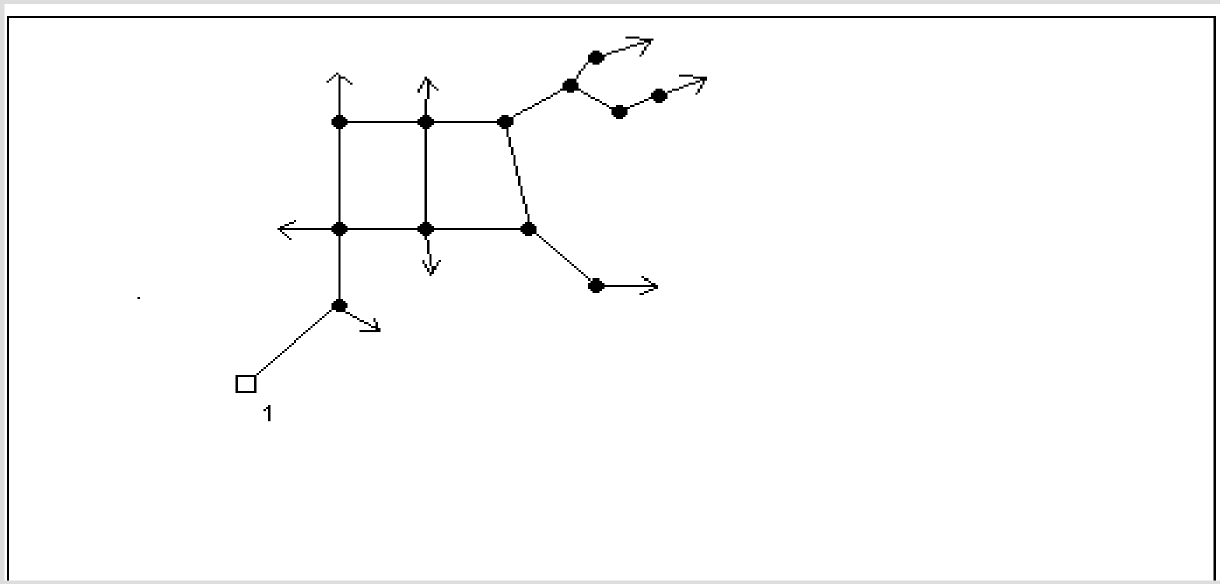
La verifica idraulica

Carlo Ciaponi

Università degli Studi di Pavia

Dipartimento di Ingegneria Idraulica e Ambientale

Posizione del problema



Rete esistente di cui è nota la geometria
E’ prefissata l’erogazione (**approccio DDA: Demand Driven Analysis**)
SCOPO:
calcolare le pressioni nei nodi al fine di accertare che assumano valori conformi ai requisiti richiesti

Dati

- *dati relativi alla rete*: L, N, M
- *dati relativi ai lati*: l_i, D_i, a_i, b_i, d_i ($i = 1,L$)
- *dati relativi ai nodi*: H_1, Q_j, z_j ($j = 1,N$)

Incognite

-*incognite relative ai tronchi:* q_i (i = 1,L)
il numero delle incognite è L

-*incognite relative ai nodi:* H_j (j = 2, N)
il numero delle incognite è N-1

Equazioni

- *equazioni di continuità ai nodi*:

$$\sum q_i + Q_j = 0 \qquad (1)$$

in numero pari a N-1

- *equazioni del moto per i tronchi*:

$$\Delta \mathrm{H} = \mathrm{H}_{N1} - \mathrm{H}_{N2} = \mathrm{s\,r}\,|\mathrm{q}|^{\mathrm{a}} \qquad (2)$$

in numero pari a L

Bilancio fra:
n° equazioni e n° incognite

NUMERO INCOGNITE = L + N -1

NUMERO EQUAZIONI = L +N-1

IL PROBLEMA

E' IDRAULICAMENTE DETERMINATO

Occorre risolvere il sistema non lineare di equazioni

Metodi di risoluzione

Metodi del bilanciamento delle portate

individuano come incognite fondamentali le portate circolanti nei tronchi

si riconducono alla classica impostazione di Hardy Cross (1936)

Metodi dei carichi ai nodi

individuano come incognite fondamentali le quote piezometriche ad ogni nodo della rete

H_{NI}-H_{NF}= s r $|q_i|^a$ → q_i=f (H_{NI}, H_{NF}) → si sostituisce nelle N-1 eq. di continuità → N-1 equazioni nelle incognite H

Metodo del bilanciamento delle portate (H.Cross)

1ª FASE:
determinazione delle portate q_i circolanti (L)

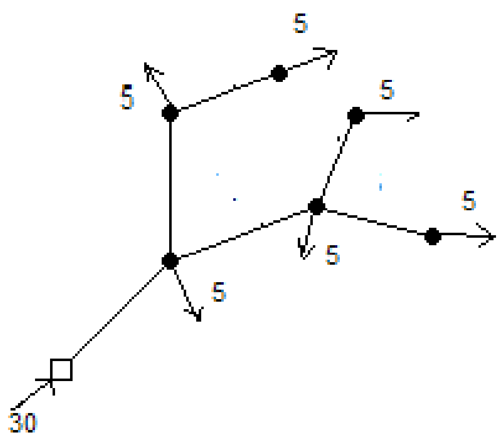
2ª FASE:
calcolo delle quote piezometriche H_j nei nodi (N-1)

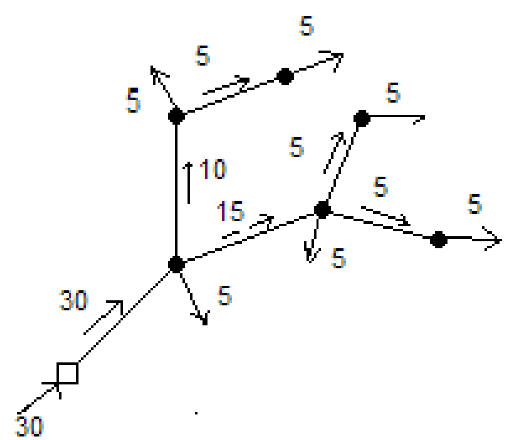
PROBLEMA:
Posso risolvere la 1ª fase con le sole equazioni di continuità ?

Numero incognite = L
Numero equazioni = N-1
Grado di indeterminazione = L – (N-1) = M [L = N+M-1]

Reti ramificate
M = 0

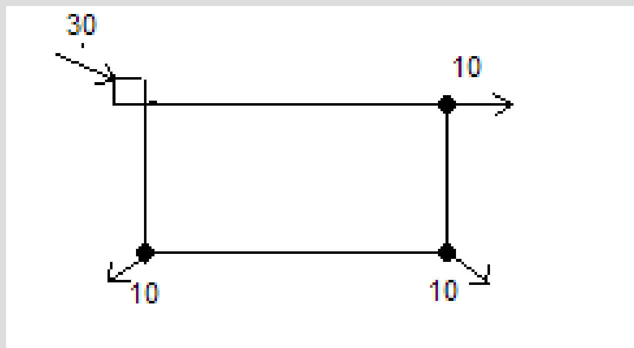
Il problema è determinato: le portate q_i sono determinate univocamente dalle equazioni di continuità

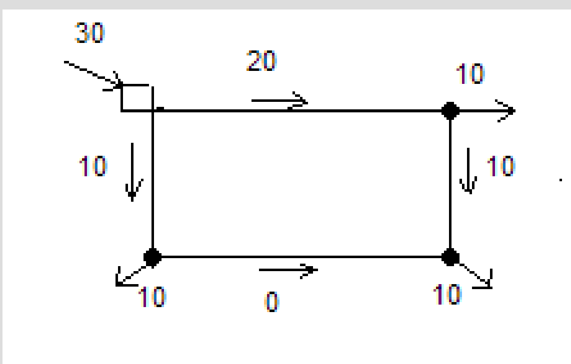


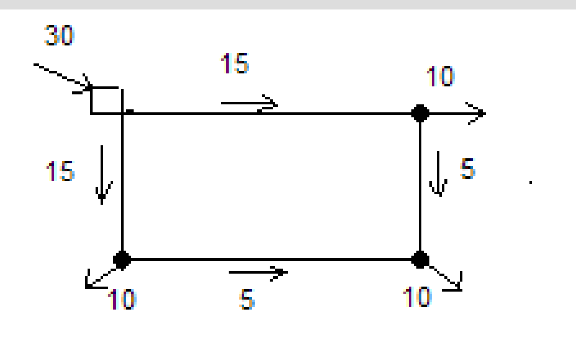


Reti a maglie
$M \neq 0$

Il problema è indeterminato: esistono infinite configurazioni di portate q_i che soddisfano le equazioni di continuità

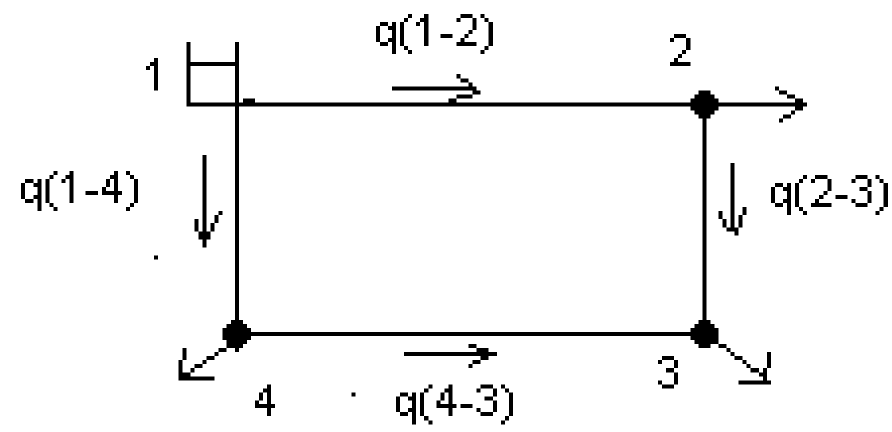






Soluzioni congruenti (∞^M)

Principio di unicità della quota piezometrica in un nodo



$$H_3 = H_1 - \Delta H_{1-2} - \Delta H_{2-3}$$

$$H_3 = H_1 - \Delta H_{1-4} - \Delta H_{4-3}$$

$$\Delta H_{1-2} + \Delta H_{2-3} - \Delta H_{4-3} - \Delta H_{1-4} = \sum \Delta H = 0$$

Soluzione congruente ed equilibrata - unica

Ricerca delle portate circolanti

$$\sum q_i + Q_j = 0 \qquad (N-1)$$

Equazione di continuità

$$\sum \Delta H_i = \sum s_i \, r_i \left| q_i \right|^a = 0 \qquad (M)$$

Equazione di bilanciamento dei carichi sulla maglia

Procedura di calcolo
Metodo di H. Cross -1

Si assume una distribuzione di portate q_i di primo tentativo che soddisfi la continuità ai nodi.

In generale, per ogni maglia:

$$\sum_i s_i r_i |q_i|^a \neq 0 \qquad (1)$$

Per soddisfare le equazioni di bilanciamento dei carichi (1), occorre introdurre una portata correttiva Δq, costante per tutti i tronchi della stessa maglia, in modo che:

$$q_i^* = q_i + \Delta q_k$$

$$\sum_i s_i^* r_i |q_i^*|^a = 0 \qquad (2)$$

Procedura di calcolo
Metodo di H. Cross - 2

$$q_i^* = q_i + \Delta q_k$$

N.B. q_i è affetta da segno (s_i)
N.B. Δq_k è affetta da segno
N.B. q_i* è affetta da segno (s_i^*)

Problema: come esprimere il valore assoluto di q_i^* in funzione di q_i e di Δq_k ?
Soluzione: sommando o sottraendo al valore assoluto di q_i il valore di Δq_k a seconda che siano concordi o discordi:

$$\left|q_i^*\right| = \left|\left|q_i\right| + s_i\,\Delta q_k\right|$$

Procedura di calcolo
Metodo di H. Cross -3

La condizione di bilanciamento diventa:

$$\sum s_i^* \, r_i \, \left| |q_i| + s_i \Delta q_k \right|^a = 0 \qquad (3)$$

Linearizzando la (3) mediante uno sviluppo in serie arrestato ai termini di primo ordine si ottiene:

$$\sum s_i^* \, r_i \left[|q_i|^a + a \, s_i |q_i|^{a-1} \Delta q_k + ... \right] = 0$$

$$\Delta q_k = -\frac{\sum s_i^* r_i |q_i|^a}{\sum s_i^* s_i r_i a |q_i|^{a-1}} = -\frac{\sum s_i r_i |q_i|^a}{\sum a \, r_i |q_i|^{a-1}}$$

Procedura di calcolo
Metodo di H. Cross -4

$$\Delta q_k = -\frac{\sum_i s_i r_i \left| q_i \right|^a}{\sum_i a\, r_i \left| q_i \right|^{a-1}}$$

$$\Delta q_k = -\frac{\sum \Delta H_i}{\sum \frac{\partial \Delta H_i}{\partial q_i}} = -\frac{\sum \Delta H_i}{\sum \Delta S_i}$$

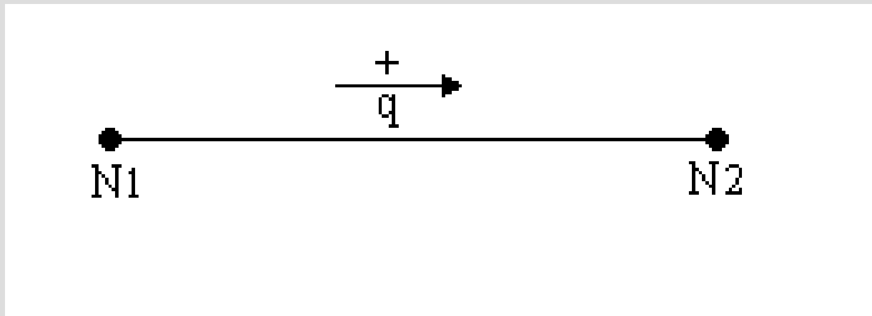
Sviluppo in serie

$$(q+\Delta q)^{a} = q^{a} + a\,q^{a-1}\Delta q + \frac{a\,(a-1)}{2}q^{a-2}\Delta q^{2} + \ldots\ldots$$

arrestando ai termini di primo ordine si ottiene:

$$\Delta q = -\frac{q^{a}}{a\,q^{a-1}}$$

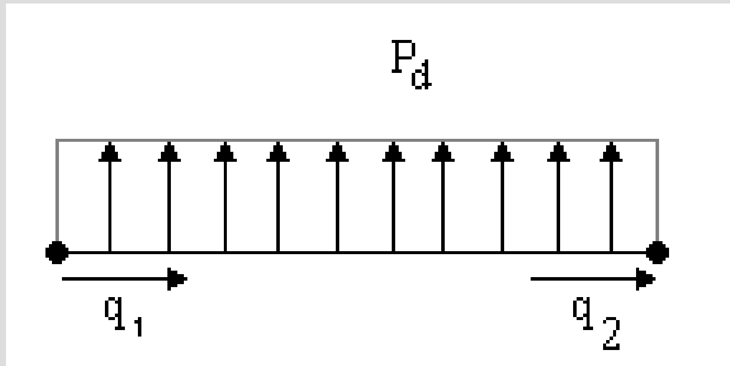
Formule risolutive: tronchi di solo trasporto



$$\Delta H = s\ r\ |q|^{a}$$

$$\Delta S = \mathrm{a}\ \mathrm{r}\ |\mathrm{q}|^{\mathrm{a}-1}$$

Formule risolutive: tronchi con erogazione distribuita

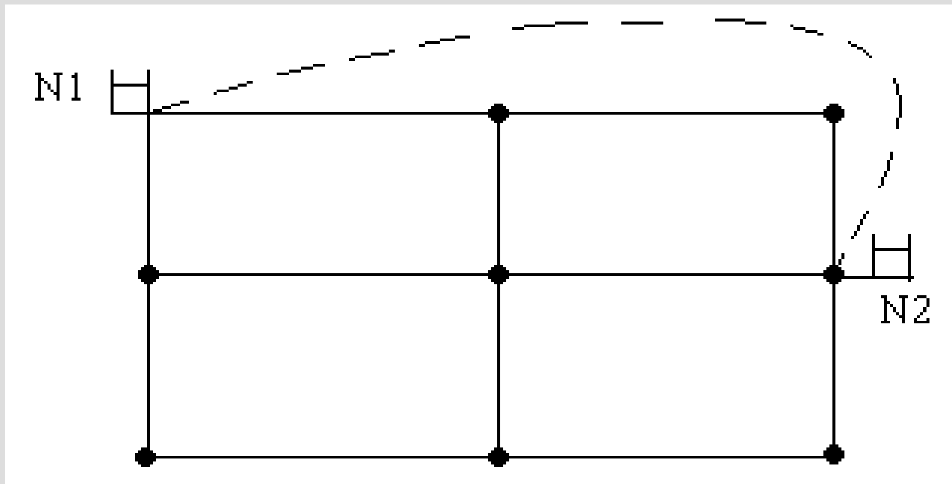


$$\Delta H = r\,\frac{|q_1|^{a+1} - |q_2|^{a+1}}{|q_1 - q_2|\,(a+1)}$$

$$\Delta S = r\,\frac{\left\| q_1^a \right| - \sigma \left| q_2^a \right\|}{q_1 - q_2}$$

(σ = + 1 se q_1 e q_2 hanno segno concorde; σ = -1 in caso contrario)

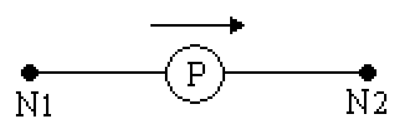
Formule risolutive: tronchi fittizi

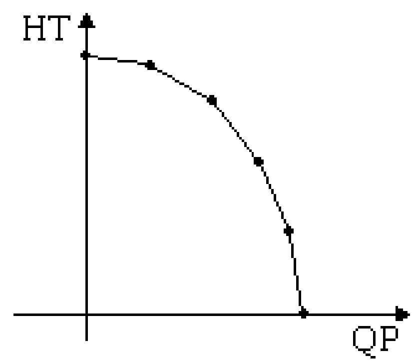


$$\Delta H = \cos t.$$

$$\Delta S = 0$$

Formule risolutive: impianti di pompaggio in linea

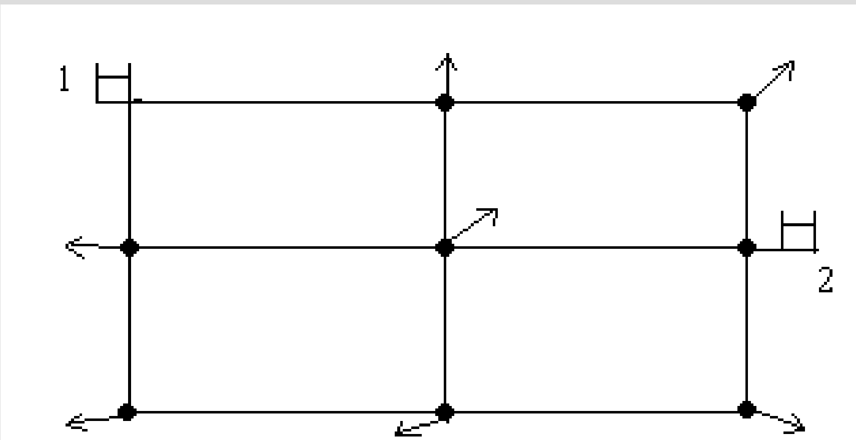




$$\Delta H = -\left(HT_1 + \frac{HT_2 - HT_1}{QP_2 - QP_1} \left(q - QP_1 \right) \right)$$

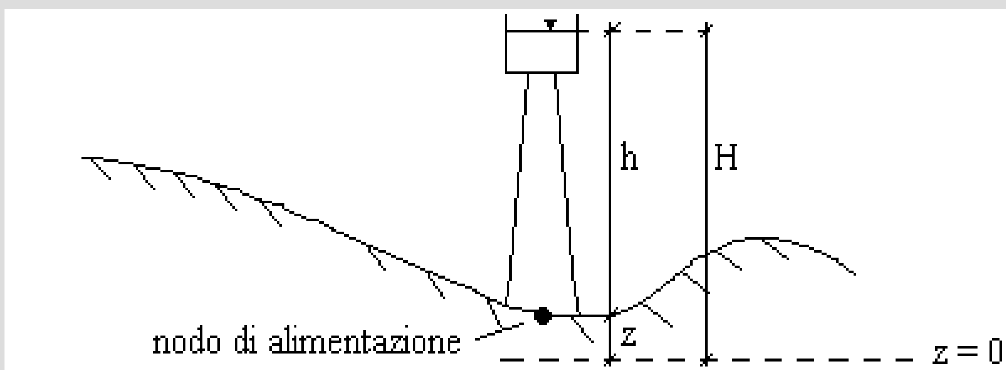
$$\Delta S = \frac{HT_2 - HT_1}{QP_2 - QP_1}$$

Alimentazione plurime con serbatoi

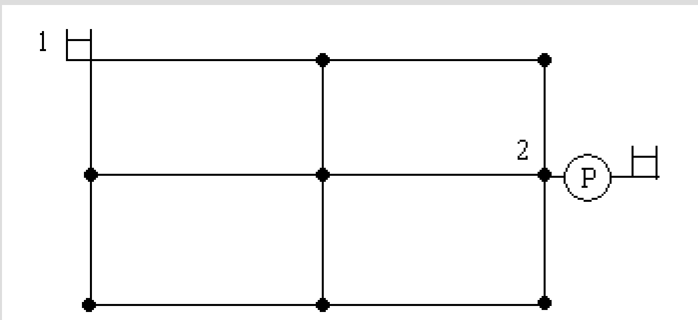


$$H_1 = \text{dato} \qquad H_2 = \text{dato}$$

$$Q_1 = ? \qquad Q_2 = ?$$

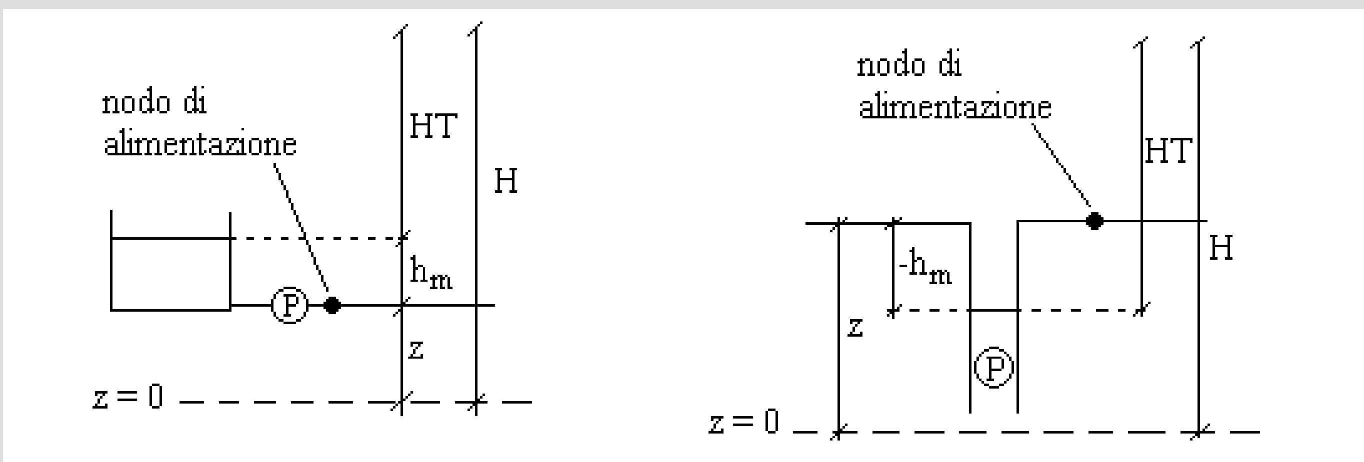


Alimentazione plurime con impianti pompaggio



$$H_1 = \text{dato} \qquad H_2 = f(Q_2)$$

$$Q_1 = ? \qquad Q_2 = ?$$



Esempio